ОБЩЕСТВО С ОГРАНИЧЕННОЙ ОТВЕТСТВЕННОСТЬЮ

ОНЛАЙН-ШКОЛА «ТОЧКА ЗНАНИЙ»

Утверждена

Приказом Генерального директора

№ 02-11/О от 04.11.2024

_________________/А. А. ШЕЛУДЬКО/

Дополнительная профессиональная программа

(повышения квалификации)

«Проверка экзаменационных работ второй части ЕГЭ по математике»

(36 ч.)

Разработчик программы:

Вольфсон Георгий Игоревич.

Краснодар, 2024

Содержание

1. Общая характеристика образовательной программы

1.1. Нормативно-правовые основания разработки образовательной программы

Правовой базой разработки настоящей образовательной программы являются следующие нормативные акты:

- Федеральный закон от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации»;
- Приказ Минобрнауки России от 01.07.2013 № 499 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным профессиональным программам»;
- Постановление Правительства Российской Федерации от 22.01.2013 № 23 «О Правилах разработки, утверждения и применения профессиональных стандартов»;
- Письмо Минобрнауки России от 22.04.2015 № ВК-1032/06 «О направлении методических рекомендаций»;
- Письмо Минобрнауки России от 30.03.2015 № АК-821/06 «О направлении методических рекомендаций по итоговой аттестации слушателей»;
- Другие нормативно-правовые акты Российской Федерации.

Настоящая образовательная программа разработана с учётом Профессионального стандарта «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)», утверждённого приказом Минтруда России от 18.10.2013 № 544н.

1.2. Категории слушателей

Слушателями образовательной программы могут быть учителя математики, имеющие высшее профессиональное образование или среднее профессиональное образование в рамках укрупненных групп направлений подготовки высшего образования и специальностей среднего профессионального образования «Образование и педагогические науки» или в области математики, либо высшее образование или среднее профессиональное образование и дополнительное профессиональное образование по направлению деятельности в образовательной организации.

1.3. Форма обучения

Очная, с применением исключительно дистанционных образовательных технологий.

1.4. Форма организации образовательной деятельности

Обучение по образовательной программе осуществляется единовременно и непрерывно посредством освоения программы согласно учебному плану.

1.5. Трудоёмкость обучения и режим занятий обучающихся

Программа рассчитана на 36 (тридцать шесть) часов и реализуется согласно учебному плану.

Сроки реализации образовательной программы (продолжительность обучения) – 8 (восемь) рабочих дней, из которых 7 (семь) дней отведено на лекции и самостоятельную работу.

Форма и режим занятий предполагает обучение в объёме от 4 до 5 часов в день, в рабочие дни, в рамках которых проводятся лекции согласно учебному плану. В Программа также требует самостоятельной работы учащихся в рекомендуемом учебным планом объёме. По итогам обучения проводится итоговая аттестация в течение 5 (пяти часов) часов.

2. Цель реализации образовательной программы и планируемые результаты обучения

Программа разработана как программа повышения квалификации для специалистов образовательных организаций и направлена на формирование и совершенствование системы подготовки обучающихся 11 классов к государственной итоговой аттестации (ГИА)

Цель реализации программы повышения квалификации — совершенствование профессиональных компетенций учителей математики в области подготовки учащихся 11 классов к государственной итоговой аттестации.

В процессе обучения слушатели изучат:

- критерии проверки экзаменационных работ, предоставляемых в рамках ГИА;
- примеры правильного и неправильного оформления экзаменационных работ;
- проблематику ошибок, допускаемых школьниками во время ГИА, включая анализ их причин и наиболее распространенных случаев.

Трудовая функция	**Трудовые действия**	**Умения и знания, подлежащие совершенствованию**	**Приобретаемые знания и умения:**
Модуль «Предметное обучение. Математика»	Формирование конкретных знаний, умений и навыков в области	**Умения:** Совместно с обучающимися строить логические рассуждения (например, решение	**Знания**: • Критерии оценивания экзаменационных работ ГИА по математике;

	математики и информатики	задачи) в математических и иных контекстах, понимать рассуждение обучающихся. Анализировать предлагаемое обучающимся рассуждение с результатом: подтверждение его правильности или нахождение ошибки и анализ причин ее возникновения; помощь обучающимся в самостоятельной локализации ошибки, ее исправлении; оказание помощи в улучшении (обобщении, сокращении, более ясном изложении) рассуждения. **Знания:** Основы математической теории и перспективных направлений развития современной математики.	• Типология заданий ГИА и особенности их оформления; • Системные ошибки обучающихся при выполнении заданий ГИА и их причины; • Методические приемы предупреждения типичных ошибок. **Умения:** • Анализ экзаменационных работ на соответствие критериям оценивания; • Выявление потенциальных трудностей обучающихся при выполнении заданий ГИА; • Разработка индивидуальных стратегий подготовки обучающихся с учетом их уровня знаний; • Формирование у обучающихся навыков корректного оформления решений в соответствии с требованиями ГИА.

3. Содержание программы

3.1. Учебный (тематический) план

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего, час	Вид учебных занятий	
			Лекции	Самостоятельная работа
1.	Занятие 1. Задача 13. Уравнения	4 ч	2 ч	2 ч
2.	Занятие 2. Задача 15. Неравенства	4 ч	2 ч	2 ч
3.	Занятие 3. Задача 16. Экономика	4 ч	2 ч	2 ч
4.	Занятие 4. Задача 18. Параметр	4 ч	2 ч	2 ч
5.	Занятие 5. Задача 14. Стереометрия	5 ч	2 ч	3 ч
6.	Занятие 6. Задача 17. Планиметрия	5 ч	2 ч	3 ч
7.	Занятие 7. Задача 19. Теория чисел	5 ч	2 ч	3 ч
Итого:		31	14	17
Итоговая аттестация: 5 часов (в форме зачёта).				

3.2. Учебная программа

Тема	**Виды учебных занятий, учебных работ**	**Содержание**
Занятие 1. Задача 13. Уравнения	Лекция, 2 часа	На занятии рассматриваются ключевые подходы к решению различных типов уравнений, включая тригонометрические, иррациональные и логарифмические уравнения.

		Слушатели изучат критерии оценивания задачи №13, в том числе особенности анализа пограничных случаев и понятие «арифметическая ошибка». Особое внимание будет уделено правильному оформлению решения задачи, включая корректность применения аббревиатуры ОДЗ и замены переменных. Слушатели также освоят методы обоснования решения в пункте «б» с использованием единичной окружности, двойного неравенства и метода подстановки.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Повторение лекционного материала.
Занятие 2. Задача 15. Неравенства	Лекция, 2 часа	На занятии будет рассмотрено решение избранных задач, включающих логарифмические, показательные и иррациональные неравенства. Слушатели ознакомятся с критериями оценивания задачи №15, а также с особенностями учета включения и исключения точек в ответе. Занятие охватывает ключевые моменты оформления задачи №15, в том числе применение «непрограммных» методов, таких как обобщенный метод интервалов и метод рационализации. Кроме того, слушатели изучат использование области допустимых значений (ОДЗ) при решении неравенств.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Повторение лекционного материала.
Занятие 3. Задача 16. Экономика	Лекция, 2 часа	Занятие посвящено решению задач с экономическим содержанием, таких как задачи на аннуитетные и дифференцированные платежи, комбинированные задачи и задачи на оптимальный выбор. Слушатели изучат критерии оценивания задачи №16 и основные требования к оформлению решений, включая использование таблиц, уравнений и производных. На занятии будет изучено понятие математической

		модели, а также обсуждено обоснование ее построения в контексте экономических задач.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Повторение лекционного материала.
Занятие 4. Задача 18. Параметр	Лекция, 2 часа	На занятии рассматриваются решения задач №18 с параметром, включая логарифмические, тригонометрические, дробно-рациональные и иррациональные уравнения. Слушатели изучат критерии оценивания таких задач, включая оценку вычислительных ошибок и корректное применение графической или аналитической интерпретации условия. Занятие также охватывает особенности оформления задачи №18, включая построение стандартных графиков и применение алгебраических методов. В процессе работы будет проведен анализ ситуаций, где использование графоаналитического метода предпочтительнее алгебраического, и наоборот.
	Самостоятельная работа, 2 часа	Повторение лекционного материала.
Занятие 5. Задача 14. Стереометрия	Лекция, 2 часа	Занятие направлено на изучение решения задач №14, включающих стереометрические задачи с тетраэдрами, пирамидами, призмами и телами вращения. Слушатели освоят методы построения сечений и определения их характеристик, а также познакомятся с критериями оценивания задачи №14. Особое внимание будет уделено грамотному использованию основных теорем для обоснования решений в первом и втором пунктах задачи.

		В ходе занятия будет представлен перечень ключевых теорем и фактов, применяемых на ЕГЭ при решении стереометрических задач.
	Самостоятельная работа, 3 часа	Повторение лекционного материала.
Занятие 6. Задача 17. Планиметрия	Лекция, 2 часа	Занятие посвящено решению задач №17, охватывающих треугольники, четырехугольники, окружности и их комбинации. Слушатели познакомятся с критериями оценивания задачи №17, включая возможность решения второго пункта задачи при условии использования результатов первого пункта, даже если он не был решен полностью. На занятии будут рассмотрены особенности оформления решений, включая грамотные ссылки на теоретические положения при обосновании решения первого пункта задачи. Слушатели также получат перечень ключевых теорем и фактов, необходимых для решения планиметрических задач на ЕГЭ.
	Самостоятельная работа, 3 часа	Повторение лекционного материала.
Занятие 7. Задача 19. Теория чисел	Лекция, 2 часа	На занятии рассматриваются решения задач №19, включающих темы делимости, десятичной записи числа и диофантовых уравнений. Слушатели изучат критерии оценивания задачи №19, включая возможность получить 1 или более баллов за решение одного или нескольких пунктов задачи. Будут рассмотрены способы приведения примеров и построения конструкций для решения пункта 'а' задачи №19, основные подходы к доказательству отсутствия решений в пункте 'б', а также методика доказательства оценок и приведение примеров для решения пункта 'в'.

	Самостоятельная работа, 3 часа	Повторение лекционного материала.

3.3. Календарный график

Объём программы 36 (тридцать) часов.

Продолжительность обучения 8 (семь) рабочих дней, включая 1 (один день) на проведение итоговой аттестации.

Форма обучения – заочная, с применением исключительно дистанционного обучения.

Образовательный процесс по программе может осуществляться в течение всего года.

Занятия проводятся по мере комплектования групп слушателей.

Занятия проводятся в рабочие дни (с учётом пятидневной рабочей недели).

Условные обозначения:

Л – лекция;

ИА – итоговая аттестация;

Ч – час;

Т – тема.

Тема / **День**	**Т 1**	**Т 2**	**Т 3**	**Т 4**	**Т 5**	**Т 6**	**Т 7**	**ИА**
1	Л, 2 ч							
2		Л, 2 ч						
3			Л, 2 ч					
4				Л, 2 ч				
5					Л, 3 ч			
6						Л,3 ч		

7							Л, 3 ч	
8								ИА 5 ч.

4. Форма аттестации и оценочные материалы

4.1. Форма аттестации слушателей

Итоговая аттестация слушателей служит инструментом оценки качества освоения программы.

Аттестация проводится в форме тестирования. Итоговая аттестация проходит на «Образовательной онлайн-платформе «Точка знаний». В процессе аттестации слушатель должен обеспечить включение микрофона и камеры, чтобы соблюсти правила прохождения аттестации. Все действия и процесс работы фиксируются системой, которая также контролирует наличие посторонних лиц и звуков, исключая возможность участия третьих лиц.

В рамках итоговой аттестации слушателю предоставляются на проверку реальные экзаменационные работы школьников. Слушатель оценивает задания, выполненные экзаменовавшимися детьми.

Итоговая аттестация проводится с учетом принципов объективности и независимости оценки качества подготовки слушателей. Оценка результатов тестирования отражает соответствие освоения программы заявленным целям и планируемым результатам обучения.

4.2. Оценочные материалы

Материалы итоговой аттестации (теста) приведены в Приложении № 1 к Программе.

По результатам итоговой аттестации выставляются отметки по системе: «верно» и «не верно».

Оценка за задание будет выставляться следующим образом:

- Если оценка совпадает с верной — слушатель получает полный балл за задание.
- Если оценка неверна — слушатель получает полный 0 баллов за задание.

Зачет получают слушатели, набравшие не менее 15 баллов и 20 возможных.

5. Учебно-методические условия реализации программы

Образовательная программа реализуется в дистанционном формате с использованием «Образовательной онлайн-платформы «Точка знаний», разработанной и принадлежащей Обществу с ограниченной ответственностью Онлайн-школа «Точка знаний». Платформа обеспечивает все необходимые организационные и технические возможности для реализации образовательной программы с использованием современных дистанционных образовательных технологий.

5.1. Технические условия для реализации программы

Видеоконференцсвязь: Платформа предоставляет все необходимые инструменты для проведения лекций, самостоятельной работы, а также для аттестации и контроля её проведения.

Оборудование, необходимое для освоения программы:

1. Персональный компьютер или ноутбук с процессором не ниже Core2Duo 2GHz (i3/i5/i7 или аналогичные процессоры AMD).
2. Веб-камера (встроенная или USB, HD).
3. Динамики и микрофон (встроенные или USB, либо беспроводные Bluetooth).

4. Подключение к интернету: широкополосное проводное или беспроводное (4G / LTE).

5. Рекомендуемая скорость интернет-соединения для передачи видеопотока: не менее 5 Мбит/с.

6. Операционная система: Windows XP/Vista/7/8/10.

7. Браузеры: Google Chrome, Safari, Mozilla Firefox, Яндекс браузер (на основе ядра Chrome).

8. Регистрация на платформе через официальный сайт https://tochka-school.ru/.

5.2. Учебно-методическое обеспечение образовательной программы

Презентационные материалы лекций: Доступные исключительно через «Образовательную онлайн-платформу «Точка знаний». Все лекции проводятся дистанционно.

Задания для самостоятельной работы: предоставляются дистанционно через платформу. Слушатели могут самостоятельно работать с материалами и выполнять задания в своем личном кабинете.

Материалы для аттестации: Доступ к материалам аттестации предоставляется через платформу. Проверка результатов также осуществляется дистанционно с использованием функционала платформы.

5.3. Список литературы

1. Ященко И. В., Шестаков С. А. «Подготовка к ЕГЭ по математике в 2025 году. Профильный уровень», - МЦНМО, 2024.

2. Гордин Р. К. «ЕГЭ. Математика. Решение задачи 16 (профильный уровень)», - МЦНМО, 2024.

3. Вольфсон Г.И. «Делимость с человеческим лицом"», - МЦНМО, 2020.

4. Гордин Р.К. «ЕГЭ. Математика. Задача 14 (профильный уровень)», - МЦНМО, 2024;

5. Шестаков С. А. «ЕГЭ 2024. Математика. Задачи с экономическим содержанием. Задача 16 (профильный уровень)», - МЦНМО, 2024.

5.4. Электронные образовательные ресурсы

1. Кодификатор элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-1

2. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-1

3. Демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-1

4. Открытый банк заданий ЕГЭ (ФИПИ) https://fipi.ru/oge/otkrytyy-bank-zadaniy-oge

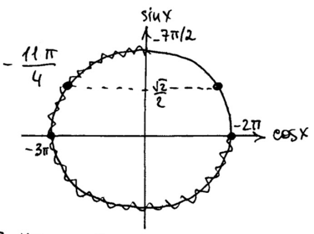
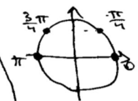
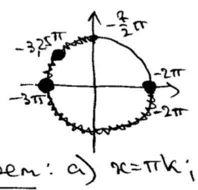
5. Программа для электронных вычислительных машин «Образовательной онлайн-платформы «Точка знаний» https://tochka-school.ru.

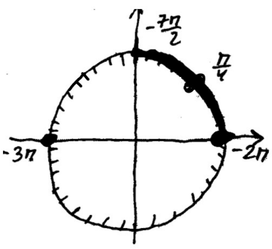
Приложение № 1 к Дополнительной профессиональной программе

(повышения квалификации)

«Проверка экзаменационных работ второй части ЕГЭ по математике»

Оценочные материалы

1	№12. а) $2\sin^3x+\sqrt{2}\cos 2x+\sin x=\sqrt{2}$ $2\sin^3x+\sqrt{2}\,(1-2\sin^2x)+\sin x-\sqrt{2}=0$ $2\sin^3x-2\sqrt{2}\sin^2x+\sin x=0$ $\sin x\,(2\sin^2x-2\sqrt{2}\sin x+1)=0$ $\sin x\,(\sqrt{2}\sin x-1)^2=0$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z\\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.$  б) $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$ $x=-3\pi-\frac{\pi}{4}=-\frac{11\pi}{4}$ $x=-3\pi$ $x=-2\pi$ Ответ: а) $x=\pi k, k\in Z$, $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$; $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in Z$ б) $x=-\frac{11\pi}{4}$; $x=-3\pi$; $x=-2\pi$. 1
2	№12 а) $2\sin^3x+\sqrt{2}\cos 2x+\sin x=\sqrt{2}$ $2\sin^3x+\sqrt{2}(1-2\sin^2x)+\sin x=\sqrt{2}$ $2\sin^3x-2\sqrt{2}\sin^2x+\sin x=0$ $\sin x(\sqrt{2}\sin x-1)^2=0$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=0 \to x=\pi k: k\in\mathbb{Z}\\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2} \to x=\frac{\pi}{4}+2\pi k: k\in\mathbb{Z};\ x=\frac{3}{4}\pi+2\pi k: k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$  б)  $\Rightarrow -2\pi; -3\pi; -3{,}25\pi$ Ответ: а) $x=\pi k$; $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k$; $x=\frac{3}{4}\pi+2\pi k$: $k\in\mathbb{Z}$ б) -2π; -3π; $-3{,}25\pi$ 2

3	№12 а) $2\sin^3 x + \sqrt{2}\cdot\cos 2x + \sin x = \sqrt{2}$ $2\sin^3 x + \sqrt{2}(1-2\sin^2 x) + \sin x = \sqrt{2}$ $2\sin^3 x + \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x = \sqrt{2}$ $\sin x(2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1) = 0$ $\sin x = 0$ или $2\sin^2 x - 2\sqrt{2}\sin x + 1 = 0$ $x = \pi k,\ k \in Z$ Замена: $\sin x = t$ $2t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$ $(\sqrt{2}t - 1)^2 = 0$ $t = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \end{array}\right.$, $n, m \in Z$ б) $x \in [-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$ 1) $-\frac{7\pi}{2} \le \pi k \le -2\pi \mid :\pi \cdot 2$ $-7 \le 2k \le -4$ $k = -3$ $x = -3\pi$ $k = -2$ $x = -2\pi$ 2) $-\frac{7\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi n \le -2\pi \mid :\pi \cdot 4$ $-14 \le 1 + 8n \le -8$ $-13 \le 8n \le -7$ $\varnothing$ 3) $-\frac{7\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi m \le -2\pi \mid :\pi \cdot 4$ $-14 \le 3 + 8m \le -8$ $-17 \le 8m \le -11$ $m = -2$ $x = -\frac{13\pi}{4}$ Ответ: а) $x = \pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$ б) -3π; -2π; $-\frac{13\pi}{4}$ 1
4	№12 а) $2\sin^3 x + \sqrt{2}\cdot\cos 2x + \sin x = \sqrt{2}$ $2\sin^3 x + \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 x) + \sin x = \sqrt{2}$ $2\sin^3 x - 2\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x = 0$ $\begin{cases} t = \sin x \\ -1 \le t \le 1 \\ 2t^3 - 2\sqrt{2}t^2 + t = 0 \end{cases}$ $D = 8 - 8 = 0$ $t(2t^2 - 2\sqrt{2}t + 1) = 0$ $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$ б) $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$  Ответ: а) πk, $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$ б) -2π; -3π 0

5

№13. Дано:

SABCD - прав. четырех пирамида

$AD = 14$

$SH = 24$

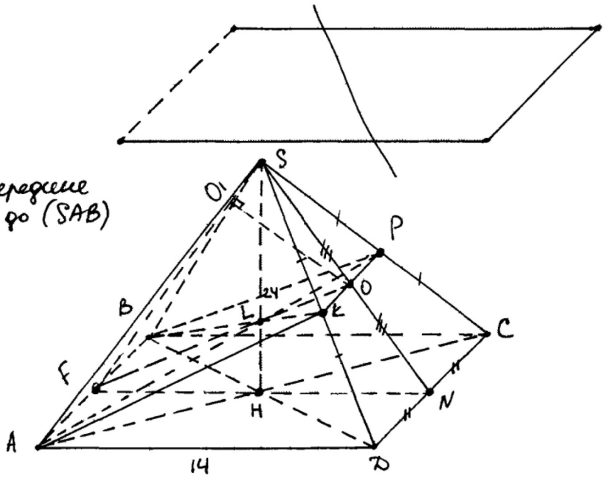
K - серед. ~~CD~~ SD

N - средина CD

(AKB) пересек SC в P.

а) Док-ть: KP пересек. SN в середине

б) Найти: расстояние от P до (SAB)



№13 продолжение)

а) Построение пл-ти (AKB): 1) Соединяю точки A, K т.к лежат в одной пл-ти (ASD)
2) Соед. точки ~~A~~ B и K в пл-ти BSD. $BK \cap SH = L$
3) Соед. в пл-ти (ASC) точки A, L. $AL \cap SC = P$
4) Соед. K, P, B. ABPK - сечение пирамиды пл-тью AKB.

Рассм $\triangle BSD$: $BS = SD$ т.к пирамида прав $\Rightarrow \triangle BSD$ - рб
SH - серед. BD т.к SABCD прав
K - серед SD по усл

Получилось, что SH, BK - мед р/б $\triangle BSD$, пересек. в L. $\Rightarrow \frac{SL}{LH} = 2:1$

В $\triangle ASC$: SH - мед, $\triangle ASC$ также рб, $\frac{SL}{LH} = 2:1 \Rightarrow$ L - точка пересеч мед $\triangle ASC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ AP - мед, т.е P - серед SC.

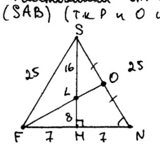
Рассм $\triangle SCD$: K - серед SD и P - серед SC $\Rightarrow$ KP - ср.лин $\triangle SCD$. $\Rightarrow KP \parallel DC$ и $\triangle SKP \sim \triangle SDC$ $(k = \frac{1}{2})$

Пусть $KP \cap SN = O$. O - серед. KP, серед SN из подобия $\triangle SKO$ и $\triangle SDN$ ($KO \parallel DN \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle SKO = \angle SDN$ и $\angle SOK = \angle SND$) по 2м углам KO - ср. лин $\triangle SDN$. Т.о $SO = ON$, т.е $KP \cap SN$ в середине, чтд.

б) Опущу SF - высота в $\triangle SBA$, а также мед, бис т.к $\triangle ASB$ - рб

$SN = \sqrt{SH^2 + HN^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ (По теореме Пифагора из $\triangle SHN$)

Расстоянием от P до (SAB) является перпендикуляр, опущенный из O на (SAB) (т.к P и O на одн. прямой) - OO_1.



Рассм $\triangle SFN$. L - точка пересеч мед $\triangle SFN \Rightarrow SL = \frac{24}{3} \cdot 2 = 16$, $LH = 8$

$SN = FS = 25$

$HN = FH = \frac{FN}{2} = \frac{AD}{2} = \frac{14}{2} = 7$

$\triangle SHN$ - прямоуг т.к SH - выс по усл. $\cos\angle SNH = \frac{7}{25}$

В $\triangle FON$. $FO^2 = FN^2 + ON^2 - 2 \cdot FN \cdot ON \cdot \cos\angle SNH$ (по теореме косинусов)

$FO^2 = 14^2 + \frac{25^2}{4} - 2 \cdot \frac{25}{2} \cdot 14 \cdot \frac{7}{25} = 14^2 + \frac{25^2}{4} - 2 \cdot 49 = \frac{1017}{4}$

$FO = \frac{\sqrt{1017}}{2}$

№13 (продолжение)

В $\triangle FSN$ теорема синусов: $\frac{FN}{\sin FSN} = \frac{FS}{\sin FNS} \Rightarrow \sin FSN = \frac{FN \cdot \sin FNS}{FS}$

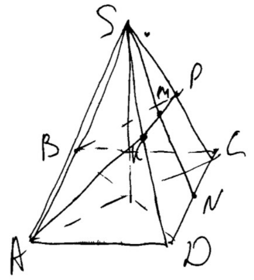
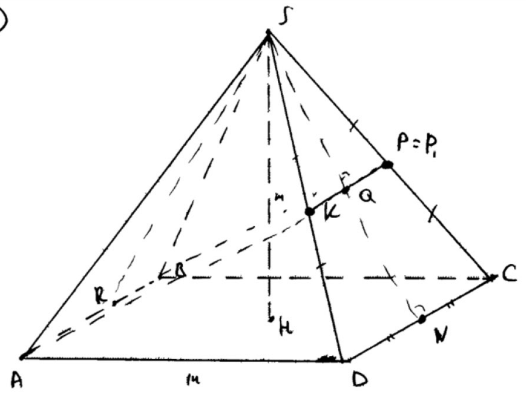
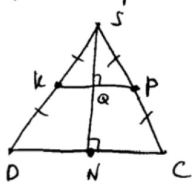
$\sin FNS = \sqrt{1 - \cos^2 FNS} = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2} = \frac{24}{25}$

$\sin FSN = \frac{14 \cdot 24}{25 \cdot 25} = \frac{OO_1}{SO}$ (из прям. $\triangle SO_1O$) $\Rightarrow OO_1 = \frac{SO \cdot 14 \cdot 24}{25^2} = \frac{\cancel{25} \cdot \overset{7}{\cancel{14}} \cdot 24}{\cancel{2} \cdot \cancel{25} \cdot 25} = \frac{168}{25} =$

$= \frac{672}{100} = 6{,}72$

Ответ: б) 6,72.

3

6	 №13. Дано: SABCD — правильная треуг. пирамида, AD=14, SH=24, SK=KD, DN= а) Док-ть: ~~BM=MN~~ KP пересекает SN посередине б) Найти: $d(P; (SAB))$ Решение: а) ABPK — сечение пирамиды $CD \parallel ABPK$ $AB \parallel CD$, $AB \in ABPK$, $PK \in ABPK$ => $PK \parallel CD$, $SK = KD$ => KP — средняя линия $\triangle SDC$ $\triangle SDC$ — равнобед. SN — медиана, высота, биссектриса Значит, KP пересекает SN посередине, ч.т.д. 0
7	13  SH=24 AD=14 а) $A \in (ASD)$, $K \in (ASD)$, проведем $(AK) \subset (ASD)$, причем $(AK) \subset (AKB)$ $A \in (ABC)$, $B \in (ABC)$, ~~проведем~~ $(AB) \subset (ABC)$ и $(AB) \subset (AKB)$ и $(AB) \not\subset (SDC)$ т.к. $AB \parallel CD$ (пр. пирамида), то $AB \parallel (SDC)$ проведем KP_1, где $(KP_1) \subset (SDC)$, KP_1 - ср. линия в $\triangle SDC$ ~~KP ∥ BD~~, тогда $(KP_1) \subset (AKB)$, т.к. $AB \parallel (SDC)$, $(AB) \subset (AKB)$ => $AB \parallel KP_1$, $K \in (AKB)$ тогда $P = P_1$ и AKPB - трапеция, $KP \parallel AB$ тр-к SCD - р/б с осн. DC, N - середина DC => SN - высота и  ~~середи~~ т.к. Q = т пер-я SN и KP т.к. KP - ср. линия, $KP \parallel DC$, то и ~~SN ...~~ то $\angle SPK = \angle SCD$, тогда $\triangle SPQ \sim \triangle SCN$ по 2 углам, тогда $\frac{SQ}{SN} = \frac{SP}{SC} = \frac{1}{2}$, значит $SQ = QN$ 1

<table>
<tr>
<td>8</td>
<td>№14. $16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0$ ОДЗ: $x \neq 0$
Пусть $4^{\frac{1}{x}-1} = t$, тогда $t^2 - t - 2 \geq 0$ $D = 3^2$ $t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \left| \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \right.$
$(t+1)(t-2) \geq 0$
$y = (t+1)(t-2)$ + − + -1 2 t
$t > 2$ $y > 0$
$-1 < t < 2$ $y < 0$
$t < -1$ $y > 0$
$\left[\begin{matrix} t \geq 2 \\ t \leq -1 \end{matrix} \right.$ $\left[\begin{matrix} 4^{\frac{1}{x}-1} \geq 2 \\ 4^{\frac{1}{x}-1} \leq -1 \end{matrix} \right.$ (не имеет реш-й, т.к любое число в любой степени больше нуля)
$4^{\frac{1}{x}-1} \geq 2$
$(2^{\frac{1}{x}-1})^2 \geq 2$
$2^{2(\frac{1}{x}-1)} \geq 2$ т.к $2=2$ и $2>1$, то функц.возрастает ⇒ знак сохраняется
$2\left(\frac{1}{x}-1\right) \geq 1$
$\frac{2}{x} - 2 \geq 1$
$\frac{2}{x} - 3 \geq 0$
$\frac{2-3x}{x} \geq 0$ − + − 0 $\frac{2}{3}$ x
$f = \frac{2-3x}{x}$
при $x > \frac{2}{3}$ $f < 0$
при $x < 0$ $f < 0$
при $0 < x < \frac{2}{3}$ $f > 0$
$x \in (0; \frac{2}{3}]$
Ответ: $x \in (0; \frac{2}{3}]$
2</td>
</tr>
<tr>
<td>9</td>
<td>№14 $16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0$
$(4^{\frac{1}{x}-1})^2 - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0$, пусть $t = 4^{\frac{1}{x}-1}$, $t > 0$
$\begin{cases} t = 4^{\frac{1}{x}-1} \\ t > 0 \\ t^2 - t - 2 \geq 0 \end{cases}$ $t^2 - t - 2 \geq 0$ $D = 1 + 8 = 9$ $t = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\left[\begin{matrix} t = 2 \\ t = -1 \end{matrix} \right.$
$\begin{cases} (t-2)(t+1) \geq 0 \\ t > 0 \end{cases}$ $t \geq 2$ $4^{\frac{1}{x}-1} \geq 2$
$(2^2)^{\frac{1}{x}-1} \geq 2$ $2(\frac{1}{x}-1) \geq 1$
$\frac{2}{x} - 3 \geq 0$ $2 - 3x \geq 0$ $x \leq \frac{2}{3}$
Ответ: [redacted] $(0; \frac{2}{3}]$
0</td>
</tr>
</table>

10

№14 $16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0$ $\quad x \neq 0$

$4^{\frac{1}{x}-1} = t \to t^2 - t - 2 \geq 0 \to (t-2)(t+1) \geq 0 \to$

$\to t \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$, но т.к. $t = 4^{\frac{1}{x}-1}$, то есть $t > 0$, то

$t \in [2; +\infty) \to 4^{\frac{1}{x}-1} \in [2; +\infty) \to \frac{1}{x} - 1 \in [\frac{1}{2}; +\infty) \to$

$\to \frac{1}{x} \in [\frac{3}{2}; +\infty) \to \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2} \to$ Если $x < 0$, то

$\frac{2}{3} < x$, но $x < 0$, а $\frac{2}{3} > 0 \to$ противоречие. Если $x > 0$, то

$\frac{2}{3} > x > 0 \to x \in (0; \frac{2}{3})$.

Ответ: $x \in (0; \frac{2}{3})$.

1

11

N15. $S = 700$ тыс руб

10 лет

$S_{выплат}$ – ? тыс руб

$S_{выплат} = 1,19S\left(1 + \frac{9+8+7+6}{10}\right) - S\left(\frac{9+8+7+6+5}{10}\right) + 1,16S \cdot \left(\frac{5+4+3+2+1}{10}\right) - S\left(\frac{4+3+2+1}{10}\right) =$

$= 4 \cdot 1,19S - 3,5S + 1,16\ 1,5S - S =$

год	январь	февр-июнь (выпл)	июль (долг)
(1) 2026	$1,19S$	$1,19S - \frac{9}{10}S$	$\frac{9}{10}S$
(2) 2027	$1,19 \cdot \frac{9}{10}S$	$\frac{9}{10} \cdot 1,19S - \frac{8}{10}S$	$\frac{8}{10}S$
(3) 2028	$1,19 \cdot \frac{8}{10}S$	$1,19 \cdot \frac{8}{10}S - \frac{7}{10}S$	$\frac{7}{10}S$
(4) 2029	$1,19\ \frac{7}{10}S$	$1,19 \cdot \frac{7}{10}S - \frac{6}{10}S$	$\frac{6}{10}S$
(5) 2030	$1,19 \cdot \frac{6}{10}S$	$1,19 \cdot \frac{6}{10}S - \frac{5}{10}S$	$\frac{5}{10}S$
(6) 2031	$1,16 \cdot \frac{5}{10}S$	$1,16 \cdot \frac{5}{10}S - \frac{4}{10}S$	$\frac{4}{10}S$
(7) 2032	$1,16 \cdot \frac{4}{10}S$	…	$\frac{3}{10}S$
(8) 2033	$1,16 \cdot \frac{3}{10}S$		$\frac{2}{10}S$
(9) 2034	$1,16 \cdot \frac{2}{10}S$		$\frac{1}{10}S$
(10) ~~2034~~ 2035	$1,16 \cdot \frac{1}{10}S$	$1,16\ \frac{1}{10}S$	0

$= 4 \cdot 119 \cdot 7 - 3,5 \cdot 700 + 116 \cdot 1,5 \cdot 7 - 700 = 1400$ тыс руб

Ответ: общая сумма выплат – 1400 тыс руб.

2

12	№15 S – тело кредита, можно представить в виде 10k, т.к. он ум. на одну и ту же сумму 10 раз. $k = 70$ тыс руб. $r_1 = 0{,}19 \to p_1 = 1 + r_1 = 1{,}19$ $r_2 = 0{,}16 \to p_2 = 1 + r_2 = 1{,}16$ Тогда получается такая модель, где x_i – выплата. $10kp_1 - x_1 = 9k \to x_1 = 10kp_1 - 9k$ $9kp_1 - x_2 = 8k \to x_2 = 9kp_1 - 8k$ $8kp_1 - x_3 = 7k$ ⋮ $7kp_1 - x_4 = 6k$ $6kp_1 - x_5 = 5k \to x_5 = 6kp_1 - 5k$ $5kp_2 - x_6 = 4k \to x_6 = 5kp_2 - 4k$ $4kp_2 - x_7 = 3k$ ⋮ $3kp_2 - x_8 = 2k$ $2kp_2 - x_9 = k \to x_9 = 2kp_2 - k$ $kp_2 - x_{10} = 0 \to x_{10} = kp_2$ Тогда $x_1 + .. + x_{10}$ (общая сумма выплат) равна: $x_1 + \ldots + x_{10} = kp_2(\overbrace{1 + .. + 5}^{15}) + kp_1(\overbrace{6 + \ldots + 10}^{40}) - k(\overbrace{1 + .. + 9}^{45}) =$ $= 70 \cdot 1{,}16 \cdot 15 + 70 \cdot 1{,}19 \cdot 40 - 70 \cdot 45 = 105 \cdot 11{,}6 + 28 \cdot 119 -$ $- 3150 = 1218 + 3332 - 3150 = 1218 + 82 = 1300$ тыс руб Ответ: общая сумма выплат — 1300 тыс. руб. 1

13

№15

S – сумма кредита (700 тыс. руб.)

r_1, r_2 – проценты, 19% и 16% соответственно, x – выплаты

Пусть $p_1 = \frac{r_1}{100}$, а $p_2 = \frac{r_2}{100}$, тогда $p_1 = 0.19$, $p_2 = 0.16$

составим таблицу платежей:

Год	Основной платеж	Платеж по процентам
2026	$\frac{S}{10}$	Sp_1
2027	$\frac{S}{10}$	$\frac{9}{10}Sp_1$
...	...	...
2029	$\frac{S}{10}$	$\frac{7}{10}Sp_1$
2030	$\frac{S}{10}$	$\frac{6}{10}Sp_1$
2031	$\frac{S}{10}$	$\frac{5}{10}Sp_2$
...	...	...
2034	$\frac{S}{10}$	$\frac{2}{10}Sp_2$
2035	$\frac{S}{10}$	$\frac{1}{10}Sp_2$

Сумма всех выплат составит:

$$\Sigma X = S + Sp_1 + \frac{9}{10}Sp_1 + \ldots + \frac{6}{10}Sp_1 + \frac{5}{10}Sp_2 + \ldots + \frac{2}{10}Sp_2 + \frac{1}{10}Sp_2 =$$

$$= S + \frac{\frac{16}{10}Sp_1}{2} \cdot 5 + \frac{\frac{6}{10}Sp_2}{2} \cdot 5 = S + \frac{40}{10}Sp_1 + \frac{15}{10}Sp_2 =$$

$$= S\left(1 + \frac{4 \cdot 19}{100} + \frac{15 \cdot 16}{10 \cdot 100}\right) = S\left(1 + \frac{76}{100} + \frac{24}{100}\right) = 2S = 2 \cdot 700000 =$$

$$= 1\,400\,000 \text{ руб.}$$

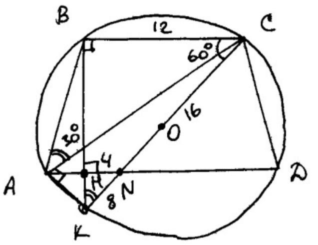
Ответ: 1400000 руб.

2

14

N16. Дано:
ABCD – трапец, впис в окр
AD – большее осн-е
BH пересек окр в K
а) Док-ть: $AC \perp AK$
б) $CK \cap AD = N$
$R = 12$
$\angle BAC = 30^\circ$
$S_{BCNH} = 8\, S_{KNH}$

Найти: AD – ?



а) BH – выс трапец $\Rightarrow \angle CBH = \angle BHD = 90^\circ$
ΔBKC – прямоуг и $\angle KBC = 90^\circ \Rightarrow \angle KBC$ опир. на диаметр окр $\Rightarrow$ KC – диаметр.
Рассм ΔAKC $\angle KAC$ опирается на KC, а KC – ~~фа~~ диаметр $\Rightarrow \angle KAC = 90^\circ$, т.е $AC \perp AK$, чтд.

б) O – центр окр, $O \in KC$ т.к KC – диаметр (по док-ву в а))
$\angle BAC = \angle BKC$ (опир на BC)
В ΔBKC: $\angle BCK = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$
$\angle BAK = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$
BCNH – трапец (прямоуг). ΔBKC впис в окр $\Rightarrow \frac{BC}{\sin 30} = 2R$ (теорема синусов)

$BC = 2 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 12$

$KC = 2R = 24$
$BK = \sin 60^\circ \cdot KC = 12\sqrt{3}$

$\Delta KHN \sim \Delta KBC$ (Пусть k – коэф. подобия) Тогда $S_{BCK} = k^2 \cdot S_{KHN} \Rightarrow S_{BCNH} =$
$= S_{KBC} - S_{KHN} = k^2 S_{KHN} - S_{KHN} = (k^2 - 1) S_{KHN} = 8\, S_{KNH}$ (из усл-я)

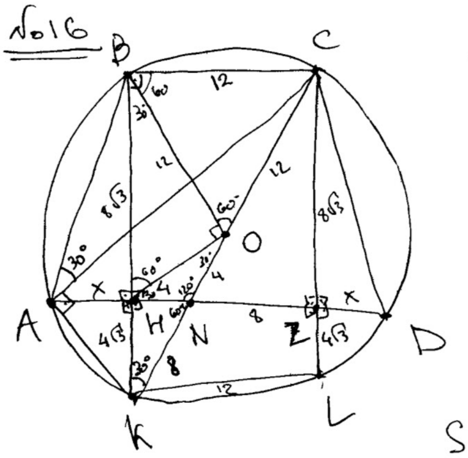
$k^2 - 1 = 8$
$k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$, тогда $\frac{12}{HN} = 3 \Rightarrow HN = 4$ (из подобия ΔKHN и ΔKBC)

$\frac{KC}{KN} = 3 \Rightarrow \cancel{KN = 3}$ $KC = 3KN \Rightarrow KN = \frac{24}{3} = 8$, $NC = KC - KN = 24 - 8 = 16$

1

15

№16



а) ∠BHD=90°, т.к. высота, а т.к. BC||AD, то ∠HBC=90° →
→ CK – диаметр окружности.
∠KAC=90°, т.к. опир. на диаметр →
→ CA||KA → ЧТД.

б) ∠BAC=30°; KC=24, т.к. рад.=12

$S_{BCNH} = 8 S_{KNH}$

$S_{BCNH} + S_{KNH} = 9 S_{KNH}$

$S_{BCK} = 9 S_{KNH}$, а т.к.

$\triangle KHN \sim \triangle KBC$, т.к. $\angle KHN = \angle KBC = 90°$ и $\angle HKN = \angle BKC$, т.к. общий, то коэф их подобия равен $\sqrt{9} = 3$.

Если $CK = 24$, то $KN = 8$.

$\angle BAC = \angle BKC = 30°$, т.к. BCKA – вписан → $HN = 4$, т.к. $\sin 30° = \frac{1}{2}$. →

→ $BC = 4 \cdot 3 = 12$

O – центр окружности. Высота CZ пересек окр. в точке L.

Пусть $AH = x$, тогда $ZD = x$. $\triangle ANK \sim \triangle CND$ по 2-м углам →

→ $AN \cdot ND = CN \cdot NK$ → $(x+4)(x+8) = 16 \cdot 8$ →

→ $x^2 + 12x + 32 = 128$ → $x^2 + 12x - 96 = 0$ → $D = 144 + \overset{384}{96 \cdot 4} = \underset{4^2 \cdot 33}{528}$

$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{33}}{2}$ → $x = -6 + 2\sqrt{33}$ →

→ $AD = 2x + 12 = 4\sqrt{33}$

Ответ: а) ЧТД; б) $4\sqrt{33}$

3

16

№16

Дано:

$ABCD$,

AD - осн., BH - выс.

а) д-ть: $AC \perp AK$

б) $R = 12$

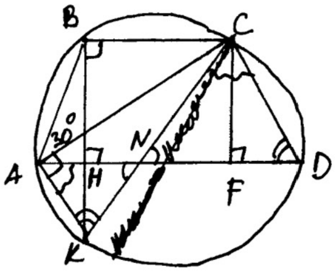
$CK \cap AD = N$

$\angle BAC = 30^\circ$

$S_{BCNH} = 8 S_{KNH}$

AD - ?

Решение:



а) BK - выс. $\Rightarrow BK \perp BC \Rightarrow \angle CBK = 90^\circ$

$\angle CBK = 90^\circ \Rightarrow CK$ - диаметр.

CK - диаметр $\Rightarrow \angle KAC = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AC \perp AK$ ч.т.д.

б) $S_{BCNH} = 8 S_{KNH} \Rightarrow S_{KBC} = 9 S_{KHN}$

$\Delta KHN \sim \Delta KBC$ ($HN \parallel BC$, $\angle BKC$ - общ.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{KH}{KB} = \frac{KN}{NC} = \sqrt{\frac{S_{KHN}}{S_{KBC}}} = \frac{1}{3}$, $KN = \frac{1}{2} NC$

$KN = 8$

$NC = 16$ $\quad KN + NC = 2R = 24$

BC - хорда $\Rightarrow \angle BAC = \angle BKC = 30^\circ$

AC - хорда $\Rightarrow \angle AKC = \angle ADC$

$\angle AKC = \angle ADC$, $\angle HNK = \angle CNF$ $\Rightarrow \Delta AKN \sim \Delta CNF \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{ND}{NK} = \frac{AK}{CD} = 2$

$AN = \frac{1}{2} NC = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$

$ND = \frac{1}{2} NK = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4$

$AD = AN + ND = 4 + 8 = 12$ Ответ: 12.

1

17

№17. a - ? 2 корня

$|x^2-a^2| = |x+a|\sqrt{x^2-4ax+5a}$

$|x-a|\,|x+a| = |x+a|\sqrt{x^2-4ax+5a}$

$|x+a|\left(|x-a| - \sqrt{x^2-4ax+5a}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x+a=0 \\ |x-a| = \sqrt{x^2-4ax+5a} \end{array}\right.$ возвожу в квадрат, т.к обе части неотрицат.

$\left[\begin{array}{l} x=-a \\ x^2-2ax+a^2 = x^2-4ax+5a \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-a \\ 2ax+a^2-5a=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=-a \\ x = \frac{-a+5}{2} \end{array}\right.$ Чтобы было 2 разн корня: $-a \ne \frac{-a+5}{2}$

$-2a \ne -a+5$

$\boxed{a \ne -5}$

Учитывая огранич-е: $x^2-4ax+5a \geq 0$

1) $x=-a$

$a^2+4a^2+5a \geq 0$

$5a(a+1) \geq 0$

Ответ: $a \in (-\infty;-5) \cup (-5;-1] \cup$

$\cup\ [0;+\infty)$

2) $x = \frac{-a+5}{2}$

$\frac{(5-a)^2}{4} - \frac{4a(5-a)}{2} + 5a \geq 0$

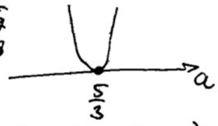
$a^2-10a+25-40a+8a^2+20a \geq 0$

$9a^2-30a+25 \geq 0$

$D = 30^2-4\cdot25\cdot9 = 0$

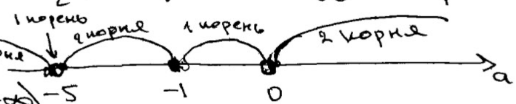
$a = \frac{30}{18} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$

~~$a \ne \frac{5}{3}$~~



(всегда неотриц)

2

<table>
<tr><td>18</td><td>
№17 $|x^2-a^2| = |x+a| \cdot \sqrt{x^2-4ax+5a}$ $\quad x^2-4ax+5a \ge 0$
$|(x+a)(x-a)| = |x+a| \cdot \sqrt{x^2-4ax+5a}$
1) Если $x=-a$, то $a^2+4a^2+5a = 5a(a+1) \ge 0 \longrightarrow$ $a=0$ $a=-1$
$\to$ при $a \in (-\infty;-1] \cup [0;+\infty)$ будет корень $x=-a$, т.к. только в этом случае выполняется, что $x^2-4ax+5a \ge 0$.
2) Если $x \ne -a$, то можно сократить обе части на $|x+a|$:
$|(x+a)(x-a)| = |x+a||x-a| = |x+a| \cdot \sqrt{x^2-4ax+5a}$
$|x-a| = \sqrt{x^2-4ax+5a}$ $\quad x^2-4ax+5a \ge 0$
$\cancel{x^2}+a^2-2ax = \cancel{x^2}-4ax+5a$
$a^2+2ax-5a=0$
$a(a+2x-5)=0$, но $a \ne 0$, т.к. если $a=0$, то x-любое,
тогда $a+2x-5=0 \to x=\frac{5-a}{2}$ – решение.
Проверим его на допустимость, ведь должно выполняться $x^2-4ax+5a \ge 0$
$\left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 2(5-a)a + 5a \ge 0$
$25+a^2-10a-40a+8a^2+20a \ge 0$
$9a^2-30a+25 \ge 0 \to (3a-5)^2 \ge 0 \to$ выполняется,
а значит корень $x=\frac{5-a}{2}$ есть всегда, при любом a.
Осталось проверить, чтобы $\frac{5-a}{2} \ne -a$, иначе будет 2 кратных равных корня $\to a \ne -5$


$a \in (-\infty;-5) \cup (-5;-1] \cup (0;+\infty)$
Ответ: $a \in (-\infty;-5) \cup (-5;-1] \cup (0;+\infty)$ ← круглые скобки
4
</td></tr>
<tr><td>19</td><td>
№18. а) Методом подбора, я поняла, что удобнее брать первое число как можно больше, например, 2009.
$a=2009$ $\quad a+b+c = 2009+11+2 = \underline{2022} \Rightarrow$ сумма чисел
$b = 2+0+0+9 = 11$
$c = 1+1 = 2$ $\quad$ может равняться 2022.
Ответ: да, может, например, если это числа 2009, 11, 2.
1
</td></tr>
</table>

20	№18. а) Да, например: $a=1994$; $b=23$; $c=5 \to$ $\to a+b+c=1994+23+5=2022$ б) Пусть a – 1-е число; b – 2-е число; c – 3-е число. По признаку делимости на 3 известно, что сумма цифр числа сравнима с самим числом по модулю 3. Тогда $a \underset{3}{\equiv} b \underset{3}{\equiv} c \to a+b+c \underset{3}{\equiv} 0$, но $2021 \underset{3}{\equiv} 2 \to$ Нет. 2